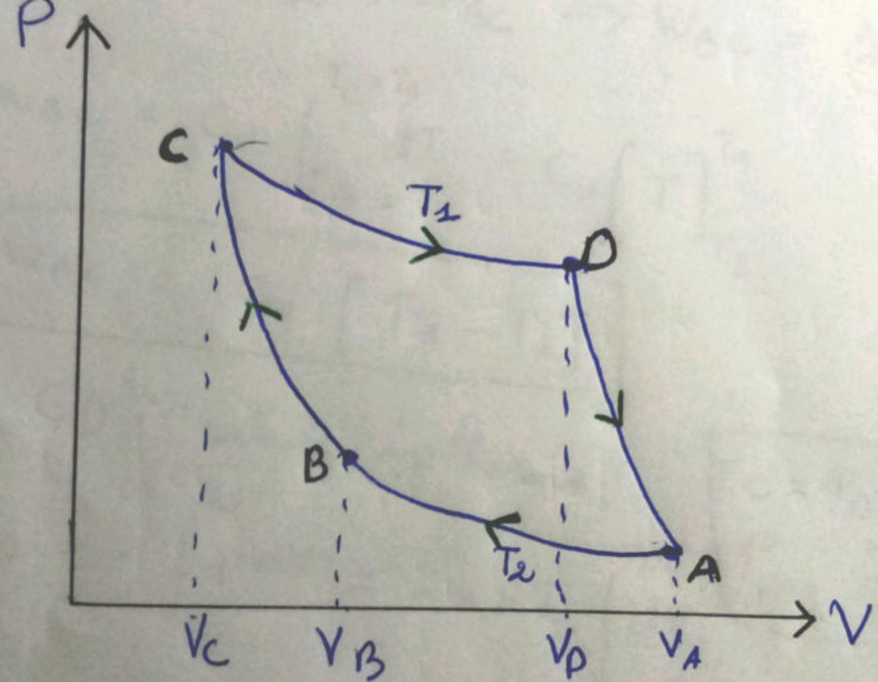
Exercice (2)

On considère un gaz parfait qui décrit un cycle de carnot.

- Chemin $A \longrightarrow B$: Compression isotherme $\left(\begin{matrix} T_A = T_B = T_2 \\ V_A > V_B \end{matrix}\right)$
- Chemin $B \longrightarrow C$: compression adiabatique $(V_B > V_C)$
- Chemin $C \longrightarrow D$: Détente isotherme $\left(\begin{matrix} T_C = T_D = T_1 \\ V_D > V_C \end{matrix}\right)$
- Chemin $D \longrightarrow A$: Détente adiabatique.

1) Diagramme de Clapeyron



2) Calcul des travaux échangés par le système lors du cycle. (W_{AB} ; W_{BC}, W_{CD} ; W_{DA} ???)

2) a- • Chemin AB : compression isotherme $T_A = T_B = T_2$

Loi gaz parfait $PV = nRT = nRT_2 \Rightarrow \boxed{P = \frac{nRT_2}{V}}$

$$W_{AB} = -\int_{V_A}^{V_B} P\,dV = -\int_{V_A}^{V_B} nRT_2 \frac{dV}{V}$$

$$W_{AB} = -nRT_2 \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = -nRT_2 \ln\left[\frac{V_B}{V_A}\right]$$

$$\boxed{W_{AB} = nRT_2 \ln\left[\frac{V_A}{V_B}\right]}$$

• Chemin BC : compression adiabatique : $(Q_{BC} = 0)$

$$\Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC} \Rightarrow W_{BC} = \underbrace{\Delta U_{BC} = C_V \Delta T}_{1^{ère}\text{ Loi de Joule.}}$$

$$W_{BC} = C_V \int_{T_B = T_2}^{T_C = T_1} dT = C_V \left[T\right]_{T_2}^{T_1}$$

$$\boxed{W_{BC} = C_V \left[T_1 - T_2\right]}$$

• Chemin CD : Detente isotherme : $\boxed{\begin{array}{c} T_C = T_D = T_2 \\ P = \frac{nRT_2}{V} \end{array}}$

$$W_{CD} = -\int_{V_C}^{V_D} P\,dV = -nRT_1 \int_{V_C}^{V_D} \frac{dV}{V}$$

$$W_{CD} = -nRT_1 \ln\left[\frac{V_D}{V_C}\right] = nRT_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)$$

$$\boxed{W_{CD} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}$$

• Chemin DA : Détente adiabatique ($Q_{DA} = 0$)

$$\Delta U_{DA} = W_{DA} + \underbrace{Q_{DA}}_{0} \Rightarrow W_{DA} = \Delta U_{DA} = C_V \Delta T$$

$$W_{DA} = C_V \int_{T_D}^{T_A} dT = C_V \left[T\right]_{T_1}^{T_2}$$

$$\boxed{W_{DA} = C_V \left[T_2 - T_1\right]}$$

b- Détermination de Q_{AB} et Q_{CD} ??

• $Q_{AB} = f(n, R, T_2, V_A, V_B)$:

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_{AB}$$

Méthode 1, Soit on calcul directement. $\Rightarrow Q_{AB} = -W_{AB}$

$$Q_{AB} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

ou: Méthode 2, $\delta Q_{AB} = C_V \underbrace{\cancel{dT}}_{(T = cte)}^{0} + p\,dV = p\,dV$

$$PV = nRT_2 \Rightarrow Q_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p\,dV = nRT_2 \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V}$$

$$\boxed{Q_{AB} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

Remarque: Signe de Q_{AB} : ??

puisque $\frac{V_B}{V_A} < 0 \Rightarrow Q_{AB} < 0$

Q_{AB} est négative, donc cédé par le système.

• $Q_{CD} = f(n, R, T_1, V_C, V_D)$:

$$\delta Q_{CD} = C_V \cancel{dT}^{0} + p\,dV = p\,dV$$

$$pV = nRT_1 \rightarrow p = \frac{nRT_1}{V}$$

$$Q_{CD} = \int_{V_C}^{V_D} p\,dV = nRT_1 \int_{V_C}^{V_D} \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

$$\boxed{Q_{CD} = -W_{CD} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}$$

- Remarque : Signe de Q_{CD} ??

puisque
$$\frac{V_D}{V} > 0 \Rightarrow Q_{CD} > 0$$

Q_{CD} est positive, donc reçu par le système.

3) l'équation caractéristique de la transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait.

chemin BC :
chemin DA :

$$\left.\begin{aligned} T_B V_B^{\gamma-1} &= T_C V_C^{\gamma-1} \\ T_A V_A^{\gamma-1} &= T_D V_D^{\gamma-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{T_C}{T_B} &= \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} \\ \frac{T_D}{T_A} &= \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{\gamma-1} \end{aligned}\right.$$

On a $T_C = T_D = T_1$ et $T_B = T_A = T_2$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} \\ \frac{T_1}{T_2} &= \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{\gamma-1} \end{aligned}\right. \Rightarrow \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_D}$$

$\rightarrow$ d'où
$$\boxed{\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}}$$

4) a- Les expressions des variations d'entropie :

- Chemin AB : $\begin{cases} \text{Isotherme} \\ T_A = T_B = T_2 \end{cases}$ $\Delta S_{AB} = \dfrac{Q_{AB}}{T_2} = \dfrac{nRT_2}{T_2} \ln\left(\dfrac{V_B}{V_A}\right)$

$$\boxed{\Delta S_{AB} = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

- Chemin BC : $\begin{cases} \text{Adiabatique} \\ Q_{BC} = 0 \end{cases}$ $\boxed{\Delta S_{BC} = \dfrac{Q_{BC}}{T_{BC}} = 0}$

- Chemin CD. : $\begin{cases} \text{Isotherme.} \\ T_C = T_D = T_1 \end{cases}$ $\Delta S_{CD} = \dfrac{Q_{CD}}{T_1} = \dfrac{nRT_1}{T_1} \ln\left(\dfrac{V_D}{V_C}\right)$

$$\boxed{\Delta S_{CD} = nR \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}$$

- Chemin DA, $\begin{cases} \text{Adiabatique} \\ Q_{DA} = 0 \end{cases}$ $\boxed{\Delta S_{DA} = \dfrac{Q_{DA}}{T_{DA}} = 0}$

b- La variation d'entropie du gaz parfait lors du cycle.

$$\Delta S_{cycle} = \Delta S_{AB} + \underbrace{\Delta S_{BC}}_{0} + \Delta S_{CD} + \underbrace{\Delta S_{DA}}_{0}$$

$$\Delta S_{cycle} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{CD} = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nR \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

D'après la question (3), on a, $\dfrac{V_B}{V_A} = \dfrac{V_C}{V_D}$

$$\Delta S_{cycle} = nR \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right) + nR \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = -nR \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) + nR \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{\Delta S_{cycle} = 0} \Rightarrow$ L'entropie est un fonction d'état (ne dépend pas du chemin suivi).